

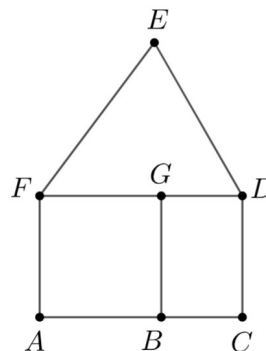
ПРОЛЕТНО МАТЕМАТИЧЕСКО СЪСТЕЗАНИЕ

Плевен, 28 – 30 март 2025 г.

Тема за 5. клас, задачи и решения

Задача 1. Квадратът $ABGF$, правоъгълникът $BCDG$ и триъгълникът FDE са разположени, както е показано на чертежа.

Триъгълникът FDE има обиколка 2025 см, а обиколката на фигурата $ACDEF$ е с 56% по-голяма от обиколката на FDE .



а) Намерете страната на квадрата $ABGF$.

б) Отсечката ED е с 40% по-малка от отсечката FD , която е с 40% по-голяма от отсечката EF . Колко процента от лицето на правоъгълника $ACDF$ е лицето на правоъгълника $BCDG$?

Решение. а) Нека страната на квадрата $ABGF$ е равна на a см. Тъй като $FD = AC$, разликата на обиколките на фигурата $ACDEF$ и триъгълника FDE е $AF + CD = 2a$. Следователно

$$2a = 56\% \cdot 2025 \text{ и } a = 28\% \cdot 2025 = 567 \text{ см.}$$

(2 точки)

б) Нека $EF = x$, тогава $FD = 140\%x = 1,4x$ и

$$ED = 60\% \cdot FD = 60\% \cdot 140\%x = 84\%x = 0,84x.$$

Сборът им е

$$x + 1,4x + 0,84x = 2025 \iff 3,24x = 2025,$$

откъдето намираме $x = 2025 : 3,24 = 625$. Следователно $EF = 625$ см.

(2 точки)

Тъй като $FD = 1,4 \cdot 625 = 875$ см, намираме

$$GD = FD - FG = 875 - 567 = 308 \text{ см,}$$

откъдето

$$\frac{S_{BCDG}}{S_{ACDF}} = \frac{GD \cdot CD}{FD \cdot CD} = \frac{GD}{FD} = \frac{308}{875} = \frac{44}{125} = 35,2\%.$$

(2 точки)

Задача 2. Мечо Пух и Йори имали общо 312 бонбона. Първо Мечо Пух подарил $\frac{1}{4}$ от своите бонбони на Йори. След това Йори дал $\frac{1}{3}$ от бонбоните, които имал в момента, на Мечо Пух. Накрая Мечо Пух подарил на Йори $\frac{1}{2}$ от бонбоните, които имал в този момент. Така се оказало, че Йори имал точно толкова бонбони, колкото имал Мечо Пух в началото. Колко бонбона е имал всеки от тях отначало?

Решение. Нека отначало Мечо Пух е имал a бонбона, а Йори е имал b бонбона;

$$a + b = 312.$$

След третото даване Йори имал a бонбона и тъй като общият брой на бонбоните се е запазил, то Мечо Пух е имал b бонбона.

(1 точка)

При първото даване Мечо Пух дал на Йори $\frac{1}{4}a$ бонбона. След това Мечо Пух имал $\frac{3}{4}a$ бонбона, а Йори е имал $b + \frac{1}{4}a$ бонбона.

(1 точка)

При второто даване Йори е дал на Мечо Пух $\frac{1}{3} \left(b + \frac{1}{4}a \right) = \frac{1}{3}b + \frac{1}{12}a$ бонбона. Така бонбоните на Мечо Пух станали

$$\frac{3}{4}a + \left(\frac{1}{3}b + \frac{1}{12}a \right) = \frac{5}{6}a + \frac{1}{3}b.$$

(1 точка)

При третото даване Мечо Пух дал половината от бонбоните си на Йори и му останали b бонбона; следователно преди нея Мечо Пух е имал $2b$ бонбона. Получаваме равенството

$$2b = \frac{5}{6}a + \frac{1}{3}b,$$

от което следва, че $a = 2b$.

(2 точки)

Следователно общият брой бонбони е $3b = 312$ и намираме $b = 104$, $a = 208$, т.е. Мечо Пух е имал 208 бонбона, а Йори е имал 104 бонбона.

(1 точка)

Задача 3. Редовете и стълбовете на квадратна таблица с 2025 реда и 2025 стълба са номерирани от 1 до 2025. Първоначално всички квадратчета в таблицата са бели, а след това оцветили:

- в **жълто** всички квадратчета в редове с номер, кратен на 3, и всички квадратчета в стълбове с номер, кратен на 15;
- в **синьо** всички квадратчета в редове с номер, кратен на 5, и всички квадратчета в стълбове с номер, кратен на 9.

При смесване на жълт и син цвят се получава зелен цвят.

Ако броят на белите, жълтите, сините и зелените квадратчета в таблицата е съответно $2025.a$, $2025.b$, $2025.c$ и $2025.d$, намерете a , b , c и d .

Решение. Оцветяването на редовете се повтаря през $\text{НОК}(3; 5) = 15$, а оцветяването на стълбовете – през $\text{НОК}(9; 15) = 45$. Следователно таблицата е покрита с еднакво оцветени правоъгълници с 15 реда и 45 стълба.

Броят на тези правоъгълници е $\frac{2025}{15} \cdot \frac{2025}{45} = 6075$.

(1 точка)

Във всеки такъв правоъгълник 15×45 :

- редовете с номер 3, 6, 9, 12 са жълти, редовете с номер 5, 10 са сини, ред 15 е зелен и остават $15 - (4 + 2 + 1) = 8$ бели реда;
- стълбовете с номер 15, 30 са жълти, стълбовете с номер 9, 18, 27, 36 са сини, стълб номер 45 е зелен и остават $45 - (2 + 4 + 1) = 38$ бели стълба.

(1 точка)

Следователно във всеки правоъгълник 15×45 има $8 \cdot 38 = 304$ бели квадратчета.

(1 точка)

Зелените квадратчета във всеки правоъгълник 15×45 се получават:

- от 1 ред с 45 квадратчета и 1 стълб с 15 квадратчета, които имат едно общо квадратче, т.е. $45 + 15 - 1 = 59$ зелени квадратчета;
- при пресичането на 4 сини стълба с 4 жълти реда и 2 жълти стълба с 2 сини реда, т.е. $4 \cdot 4 + 2 \cdot 2 = 20$ зелени квадратчета.

Така зелените квадратчета в един правоъгълник са $59 + 20 = 79$.

(1 точка)

Сините квадратчета във всеки правоъгълник 15×45 се получават при пресичането на 4 сини стълба с 8 бели реда, 2 сини реда с 38 бели стълба и 4 сини стълба с 2 сини реда, т.е. са $4 \cdot 8 + 2 \cdot 38 + 4 \cdot 2 = 116$.

(1 точка)

Жълтите квадратчета във всеки правоъгълник 15×45 се получават при пресичането на 2 жълти стълба с 8 бели реда, 4 жълти реда с 38 бели стълба и 2 жълти стълба с 4 жълти реда, т.е. са $2 \cdot 8 + 4 \cdot 38 + 2 \cdot 4 = 176$.

(1 точка)

Тъй като правоъгълниците 15×45 са 6075 на брой, броят на:

- белите квадратчета на дъската е $304.6075 = 2025.a$, откъдето $a = 304.3 = 912$;
- жълтите квадратчета на дъската е $176.6075 = 2025.b$, откъдето $b = 176.3 = 528$;
- сините квадратчета на дъската е $116.6075 = 2025.c$, откъдето $c = 116.3 = 348$;
- зелените квадратчета на дъската е $79.6075 = 2025.d$, откъдето $d = 79.3 = 237$.

(1 точка)

Забележка. Друг начин да се намери броят на квадратчетата от всеки цвят в правоъгълник 15×45 , е като се разгледат редовете в този правоъгълник. Има:

- 8 *предимно бели* реда с по 38 бели, 2 жълти, 4 сини и едно зелено квадратче;
- 4 *предимно жълти* реда с по 40 жълти и 5 зелени;
- 2 *предимно сини* реда с по 42 сини и 3 зелени;
- 1 *зелен* ред с 45 зелени квадратчета.

Така в правоъгълник 15×45 има $8.38 = 304$ бели квадратчета,

$8.1 + 4.5 + 2.3 + 45 = 79$ зелени квадратчета,

$8.2 + 4.40 = 176$ жълти квадратчета,

$8.4 + 2.42 = 116$ сини квадратчета.

Задача 4. На горския празник се събрали вълшебни същества: феи и елфи. Оказало се, че всяка фея познава точно $\frac{1}{5}$ от останалите феи и точно 5 елфи, а всеки елф познава точно $\frac{1}{3}$ от останалите елфи и точно 3 феи.

Елфът Пък и феята Титания се познават, но нямат общи познати. Оказало се, че на празника има 262 вълшебни същества (феи или елфи), които не познават нито Пък, нито Титания.

Колко феи и колко елфи са присъствали на празника?

(Познанствата са взаимни: ако А познава В, то и В познава А.)

Решение. Нека има n феи и k елфи на тържеството. Тъй като всяка фея познава точно 5 елфи, броят на приятелствата между елфи и феи е $5n$. Тъй като всеки елф познава точно 3 феи, броят на познанства между елфи и феи е $3k$. Това означава, че броят на всички познанства е кратен на 3 и на 5, т.е. на 15; да означим този брой с $15a$. Получихме равенството

$$5n = 3k = 15a.$$

Тогава $n = 3a$, $k = 5a$.

(2 точки)

Титания познава $\frac{1}{5}$ от останалите $(n - 1)$ феи и 5 елфи, сред които е Пък.

Пък познава $\frac{1}{3}$ от останалите $(k - 1)$ елфи и 3 феи, сред които е Титания.

Тъй като те нямат общи познати, броят на всички вълшебни същества е

$$n + k = 5 + \frac{1}{5} \cdot (n - 1) + 3 + \frac{1}{3} \cdot (k - 1) + 262,$$

$$n + k = 5 + \frac{1}{5} \cdot n - \frac{1}{5} + 3 + \frac{1}{3} \cdot k - \frac{1}{3} + 262.$$

(2 точки)

Като извадим от двете страни на равенството $\frac{1}{5} \cdot n$ и $\frac{1}{3} \cdot k$, получаваме

$$\frac{4}{5} \cdot n + \frac{2}{3} \cdot k = 5 - \frac{1}{5} + 3 - \frac{1}{3} + 262 = 269\frac{7}{15}.$$

Като използваме, че $n = 3a$, $k = 5a$, от последното равенство получаваме

$$\frac{4}{5} \cdot 3a + \frac{2}{3} \cdot 5a = 269\frac{7}{15},$$

$$a \cdot \left(\frac{12}{5} + \frac{10}{3} \right) = 269\frac{7}{15},$$

$$a \cdot \frac{86}{15} = \frac{4042}{15}$$

и намираме $a = 47$.

(2 точки)

Всички феи са $3 \cdot 47 = 141$, а всички елфи са $5 \cdot 47 = 235$.

(1 точка)

Тема за 6. клас, задачи и решения

Задача 1. По окръжност са отбелязани 15 точки, които я разделят на 15 равни дъги. Във всяка от отбелязаните точки е записано цяло число така, че произведението на всеки три поредни числа е равно на 15 и сборът на всички записани числа е -15 .

а) Намерете числата, които са записани в отбелязаните точки по окръжността.

б) Мравките Ата и Дот тръгват едновременно от една и съща отбелязана точка и се движат по окръжността в противоположни посоки. Ата се движи два пъти по-бързо от Дот.

Те се срещат 5 пъти и при всяка среща Ата запомня числото, което е записано в точката на срещата. На колко може да е равен сборът на петте числа, които е запомнила Ата?

Решение. а) Нека a, b, c и d са четири последователно записани числа. Тъй като $abc = bcd = 15$, то $a = d$, т.е. числата се повтарят през три.

Следователно по окръжността последователността a, b, c се повтаря $15 : 3 = 5$ пъти и сборът на числата в отбелязаните точки е

$$5(a + b + c) = -15, \quad \text{т.е.} \quad a + b + c = -3.$$

От друга страна, 15 се представя като произведение на три цели числа по 7 начина:

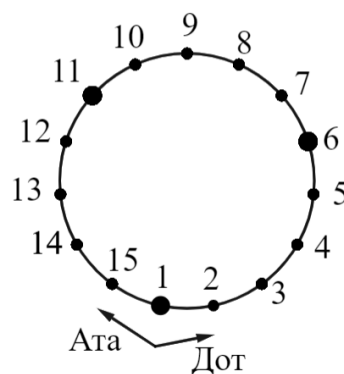
$$15 = 1.1.15 = (-1).(-1).15 = (-1).1.(-15) = 1.3.5 = 1.(-3).(-5) = (-1).(-3).5 = (-1).3.(-5).$$

Условието $a + b + c = -3$ е изпълнено само когато числата са $-1, -5$ и 3 (в някакъв ред). **(2 точки)**

б) Нека разстоянието между две последователни отбелязани точки е k , т.е. дължината на окръжността е $15k$.

Да номерираме отбелязаните точки по окръжността. Нека Ата и Дот тръгват от точка 1, и нататък номерираме отбелязаните точки с числата $2, 3, \dots, 15$ по посоката на движение на Дот.

В момента на срещата си мравките са изминали общо разстояние $15k$. Щом скоростите на Дот и Ата се отнасят както $1 : 2$, то и разстоянията, изминати от тях до срещата, се отнасят както $1 : 2$.



Следователно Дот е изминала разстояние $5k$, а Ата е изминала разстояние $10k$.

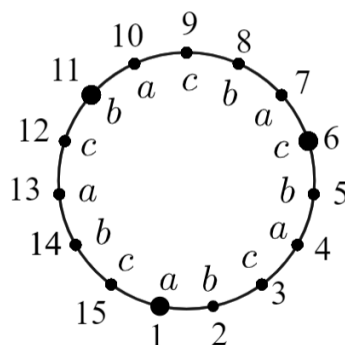
Тъй като тръгват от точка 1 и номерацията е по посоката на движение на Дот, срещите са в точки с номер $1 + 5 = 6$, $6 + 5 = 11$, $11 + 5 = 16$, т.е. 1, след това отново в точките с номер 6 и 11. (2 точки)

Нека в точките с номер 1, 2 и 3 са записани съответно числата a , b , c ; тогава b е записано и в точка номер 11, а c е записано в точка номер 6. В точките на срещите са записани числата c, b, a, c, b и сборът им е

$$\begin{aligned} S &= a + 2b + 2c = 2.(a + b + c) - a = \\ &= 2.(-3) - a = -6 - a. \end{aligned}$$

Тъй като a е -1 , -5 или 3 , сборът S може да е -5 , -1 или -9 .

(2 точки)



Задача 2. Туристическо корабче изпълнява курс от точка A до точка B по течението на една река и се връща обратно по същия път.

Корабчето тръгва от A със собствена скорост V , която се отнася към скоростта на течението на реката както $4 : 1$. Когато стига до точка C , корабчето забавя ход и плава до B със собствена скорост $50\%V$.

На връщане корабчето пътува със собствена скорост $3V$ и изминава пътя от B до A три пъти по-бързо, отколкото пътя от A до B .

Намерете отношението на разстоянията AC и CB .

Забележка. Собствена скорост на плвателен съд наричаме скоростта му в спокойна вода.

Решение. Нека $V_{\text{теч.}} = x$ km/h. Тогава $V = 4x$ и изразяваме

$$V_{AC} = 4x + x = 5x, \quad V_{CB} = 2x + x = 3x, \quad V_{BC} = V_{CA} = 12x - x = 11x.$$

(2 точки)

Скоростта V_{AC} , с която е изминато разстоянието AC на отиване, се отнася към скоростта V_{CA} , с която е изминато на връщане, както $5x : 11x = 5 : 11$. При фиксирано разстояние времето е обратно пропорционално на скоростта, т.е. времето t_{AC} , за което е изминато разстоянието AC на отиване, се отнася към времето t_{CA} , за което е изминато същото разстояние на връщане, както $11 : 5$. Това означава, че $t_{AC} = 11k$, $t_{CA} = 5k$.

По същия начин, $V_{CB} : V_{BC} = 3x : 11x = 3 : 11$. Следователно

$$t_{CB} : t_{BC} = 11 : 3,$$

т.е. $t_{CB} = 11n$, $t_{BC} = 3n$.

(2 точки)

От условието, че времето на отиване е 3 пъти по-голямо от времето на връщане, т.е. $t_{AC} + t_{CB} = 3(t_{BC} + t_{CA})$, получаваме

$$11k + 11n = 3(5k + 3n) \iff n = 2k.$$

Тогава

$$\frac{AC}{BC} = \frac{t_{AC} \cdot V_{AC}}{t_{CB} \cdot V_{CB}} = \frac{11k \cdot 5x}{11n \cdot 3x} = \frac{5}{6}.$$

(2 точки)

Задача 3. Даден е триъгълник ABC с обиколка 96 cm. Височината CH лежи вътре в триъгълника, като $BC : AH = 2 : 3$ и $AC : BH = 17 : 6$.

а) Намерете лицето на триъгълника ABC .

б) На височината CH е избрана точка P така, че $CP : PH = 7 : 1$. Ако M е пресечната точка на правите AP и BC , а K е пресечната точка на правите BP и AC , намерете лицето на четириъгълника $CKPM$.

Решение. а) От $BC : AH = 2 : 3$ следва, че $BC = 2x$, $AH = 3x$. От $AC : BH = 17 : 6$ следва, че $AC = 17y$, $BH = 6y$.

От питагоровата теорема за триъгълниците AHC и BHC следва, че

$$AC^2 - AH^2 = CH^2 = BC^2 - BH^2,$$

$$(17y)^2 - (3x)^2 = (2x)^2 - (6y)^2 \iff 289y^2 + 36y^2 = 4x^2 + 9x^2 \iff$$

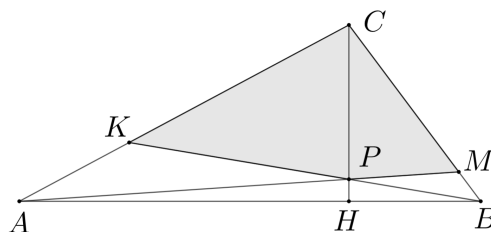
$$325y^2 = 13x^2 \iff x^2 = 25y^2 = (5y)^2.$$

От последното равенство следва, че $x = 5y$. Тогава $BC = 2x = 10y$, $AH = 3x = 15y$, $AB = AH + HB = 15y + 6y = 21y$ и от условието, че обиколката на триъгълника ABC е 96 cm получаваме равенството

$$21y + 10y + 17y = 96 \iff 48y = 96 \iff y = 2.$$

Тогава $AB = 21y = 42$ cm, $CH^2 = BC^2 - BH^2 = (10y)^2 - (6y)^2 = (8y)^2$, т.е. $CH = 8y = 16$ cm и намираме $S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 42 \cdot 16 = 336$ cm².

(3 точки)



б) Намираме $AH = 15y = 30$ см, $BH = 6y = 12$ см и отсечката $PH = \frac{1}{8}CH = \frac{1}{8} \cdot 16 = 2$ см. Тогава $S_{ABP} = \frac{AB \cdot PH}{2} = \frac{42 \cdot 2}{2} = 42$ см², $S_{APC} = \frac{AH \cdot PC}{2} = \frac{30 \cdot 14}{2} = 210$ см² и $S_{BPC} = \frac{BH \cdot PC}{2} = \frac{12 \cdot 14}{2} = 84$ см².

Ако означим $S_{CPK} = x$ см², то $S_{APK} = (210 - x)$ см². От свойството

$$S_{CPK} : S_{APK} = CK : KA = S_{CBP} : S_{ABP}$$

получаваме равенството

$$x : (210 - x) = 84 : 42 \iff 2(210 - x) = x \iff x = 140.$$

Аналогично, ако означим $S_{CPM} = y$ см², то $S_{BPM} = (84 - y)$ см² и

$$S_{CPM} : S_{BPM} = CM : MB = S_{CAP} : S_{BAP},$$

откъдето получаваме равенството

$$y : (84 - y) = 210 : 42 \iff 5(84 - y) = y \iff y = 70.$$

Така получихме, че $S_{CKPM} = x + y = 210$ см².

(4 точки)

Забележка. Решението в б) може да използва, освен посоченото свойство, теоремата на Менелай или теоремата на Чева. Тези факти, ако са използвани вярно, не се нуждаят от доказателство.

Задача 4. По планинска пътека се изкачвала група от 45 ученици. Техният водач ги подредил в колона един след друг. Всяко момиче казало на водача колко момчета има пред него в колоната, и всяко момче казало на водача колко момичета има пред него в колоната.

Водачът пресметнал, че сборът на числата, които му казали учениците, е 504.

Ако в групата има повече момчета, отколкото момичета, намерете броя на момчетата и броя на момичетата.

Решение. Нека в групата има a момчета и b момичета. По условие

$$a + b = 45.$$

Забелязваме, че за всяка двойка на момче и момиче единият брой другия в числото си. Ако момчето е пред момичето, то момичето преброява това момче; ако момичето е пред момчето, то момчето преброява това момиче.

Следователно сборът на всички казани числа е равен на броя на двойките момче и момиче в групата, т.е. на $a \cdot b$.

(4 точки)

Тъй като

$$a.b = 504 = 2^3.3^2.7$$

и сборът на a и b се дели на 3 и не се дели на 2, то търсените числа може да са $3.2^3 = 24$ и $3.7 = 21$, или $3.2^3.7 = 168$ и 3. Първата двойка има желания сбор $24 + 21 = 45$.

Получихме, че в групата има 24 момчета и 21 момичета.

(3 точки)

Второ решение. Ще покажем, че ако разменим местата на момче и момиче, които са едно след друго, сборът на числата не се променя.

Нека момичето А е точно пред момчето В. Когато А и В си разменят местата, числото на А се увеличава с 1, а числото на В се намалява с 1, числата на останалите деца не се променят, следователно общият сбор се запазва.

След няколко последователни размени на места ще стигнем до момента, в който първи са момчетата, а след тях са момичетата. Тогава числото на всяко момче е 0, а на всяко момиче е a и сборът е $a.b$.

Нататък разсъжденията продължават както в първото решение.

Тема за 7. клас, задачи и решения

Задача 1. Намерете броя на петцифрените числа $\overline{abcde}$, за които

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 = 2(a + b + c + d + e).$$

Решение. Записваме даденото равенство във вида

$$(a - 1)^2 + (b - 1)^2 + (c - 1)^2 + (d - 1)^2 + (e - 1)^2 = 5.$$

(1 точка)

Има две възможности 5 да се представи като сбор на пет квадрата на неотрицателни цели числа:

$$1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 = 2^2 + 1^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 = 5.$$

Първи случай. При $(x - 1)^2 = 1 \iff x(x - 2) = 0$ следва, че $x = 2$ или $x = 0$, т.е. петцифрените числа трябва да са записани само с цифрите 2 и 0.

(1 точка)

Първата цифра трябва да е 2, а за останалите четири позиции има по 2 възможности. В този случай числата са $2^4 = 16$.

(1 точка)

Втори случай. Ако $(x - 1)^2 = 2^2 \iff (x + 1)(x - 3) = 0$ и $x > 0$, намираме $x = 3$. Ако $(x - 1)^2 = 0$, то $x = 1$. Следователно петцифрените числа имат по една цифра 3, една цифра 2 или 0 и по 3 цифри 1.

(1 точка)

При цифри 3, 2, 1, 1, 1, за избор на позицията на цифрата 3 има 5 възможности, за цифрата 2 остават 4 възможности и останалите места се заемат от трите единици. Общо числата са $5 \cdot 4 = 20$.

(1 точка)

При цифри 3, 0, 1, 1, 1 за избор на позицията на цифрата 0 има 4 възможности, за цифрата 3 остават 4 възможности и останалите места се заемат от трите единици. Общо числата са $4 \cdot 4 = 16$.

(1 точка)

Окончателно, търсените числа са $16 + 20 + 16 = 52$.

Задача 2. Вътрешната ъглополовяща BL и височината CH на $\triangle ABC$ се пресичат в точка O , като $CL = OL$ и $\angle ACB$ е с 10% по-малък от $\angle ABC$.

а) Намерете $\angle BAC$.

б) Докажете, че $HA = HB + BC$.

Решение. а) Нека $\angle ABL = \angle CBL = x$; тогава $\angle ABC = 2x$ и изразяваме $\angle ACB = 90\% \angle ABC = 1,8x$.

От правоъгълния триъгълник NOB изразяваме $\angle NOB = 90^\circ - x$. Ъглите $\angle LOC$ и $\angle NOB$ са връхни, следователно $\angle LOC = 90^\circ - x$.

Тъй като $CL = OL$, триъгълникът COL е равнобедрен, следователно $\angle ACO = \angle LOC = 90^\circ - x$. От правоъгълния триъгълник AHC изразяваме $\angle HAC = 90^\circ - \angle ACH = 90^\circ - (90^\circ - x) = x$.

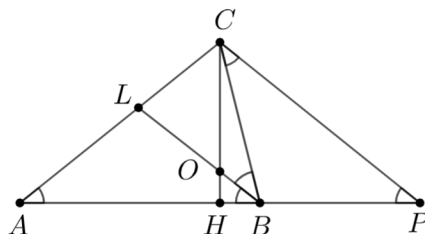
От сбора на ъглите в $\triangle ABC$ получаваме равенството

$$x + 2x + 1,8x = 180^\circ,$$

от което намираме $x = \frac{75^\circ}{2} = 37^\circ 30'$.

(3 точки)

б) Да построим точка P на правата AB така, че $BP = BC$ и лъчите $BP \rightarrow$ и $BA \rightarrow$ са противоположни.



Тогава $\triangle BPC$ е равнобедрен и следователно

$$\angle BPC = \angle BCP = \frac{1}{2} \angle ABC = \frac{75^\circ}{2}.$$

Тогава $\angle BAC = \angle BPC$, следователно $\triangle APC$ е равнобедрен. Тогава височината CH към основата AP в този триъгълник е и медиана, т.е. $AH = HP$. Но

$$AH = HP = HB + BP = HB + BC.$$

(3 точки)

Задача 3. В правоъгълна координатна система Oxy ще казваме, че точката $P(x, y)$ е *интересна*, ако нейните координати x и y са цели числа между -100 и 100 включително и

$$12x^2 + 7xy - 12y^2 = 0.$$

а) Намерете броя на всички интересни точки.

б) По колко различни начина могат да се изберат две интересни точки A и B така, че лицето на триъгълника AOB да е равно на 2025 ?

Решение. а) Очевидно точката $O(0; 0)$ е интересна. Ще търсим ненулеви цели стойности на x и y . Тъй като

$$12x^2 + 7xy - 12y^2 = 0 \iff 12x^2 + 16xy - 9xy - 12y^2 = 0 \iff$$

$$4x(3x + 4y) - 3y(3x + 4y) = 0 \iff (3x + 4y)(4x - 3y) = 0,$$

получаваме, че $3x + 4y = 0$ или $4x - 3y = 0$.

Ако $3x + 4y = 0$, числото $x = -\frac{4y}{3}$ е цяло, точно когато y се дели на 3 , т.е. $y = 3k$; тогава $x = -4k$. Тъй като x е ненулево цяло число между -100 и 100 , то k е различно от 0 и е между -25 и 25 . Следователно има $2 \cdot 25 = 50$ интересни точки от вида $(-4k; 3k)$, $k \neq 0$.

Ако $4x - 3y = 0$, числото $x = \frac{3y}{4}$ е цяло, когато y се дели на 4 , т.е. $y = 4n$; тогава $x = 3n$. Тъй като y е ненулево цяло число между -100 и 100 , то n е различно от 0 и е между -25 и 25 . Следователно има $2 \cdot 25 = 50$ интересни точки от вида $(3n; 4n)$, $n \neq 0$.

Така получаваме общо $1 + 2 \cdot 50 = 101$ интересни точки.

(3 точки)

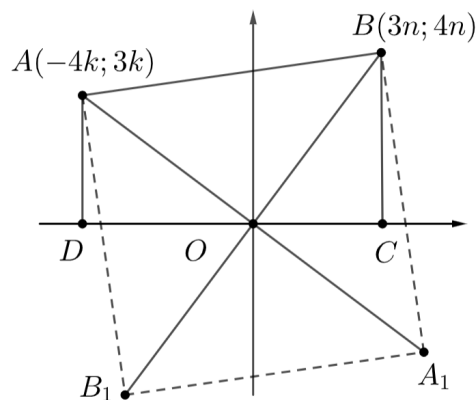
б) Интересните точки от вида $(-4k; 3k)$ лежат на графиката на правата пропорционалност $y = -\frac{3}{4}x$, която е права a през O .

Интересните точки от вида $(3n; 4n)$ лежат на графиката на правата пропорционалност $y = \frac{4}{3}x$, която е права b през O .

Точките O , A и B образуват триъгълник, когато едната от точките A и B е от вида $(-4k; 3k)$, а другата е от вида $(3n; 4n)$.

Ако A и B са интересни точки и лицето на триъгълника AOB е 2025 , то точките A_1 и B_1 , които са симетрични съответно на A и B относно O , също са интересни и лицата на триъгълниците AOB , AOB_1 , A_1OB , A_1OB_1 са равни. Последното твърдение следва от еднаквостта на триъгълниците AOB и A_1OB_1 и от факта, че AO и BO са медиани в триъгълниците BB_1A и AA_1B .

Достатъчно е да се направят разсъждения за един от четирите триъгълника. Нека $A(-4k; 3k)$, $B(3n; 4n)$, $1 \leq k, n \leq 25$, където k и n са естествени числа.



Ако $C(3n; 0)$, $D(-4k; 0)$, то

$$S_{AOB} = S_{ABCD} - S_{AOD} - S_{BOC} =$$

$$= \frac{(3k + 4n)(3n + 4k)}{2} - \frac{4k \cdot 3k}{2} - \frac{3n \cdot 4n}{2} = \frac{25kn}{2},$$

откъдето

$$2025 = \frac{25kn}{2} \iff kn = 2 \cdot 3^4$$

Има две възможности за $1 \leq k, n \leq 25$: $k = 2 \cdot 3^2$, $n = 3^2$ или $n = 2 \cdot 3^2$, $k = 3^2$. Следователно търсените двойки точки са $2 \cdot 4 = 8$.

(4 точки)

Забележка. Всички двойки интересни точки са:

n	k	$B(3n; 4n)$	$A(-4k; 3k)$
9	18	(27; 36)	(-72; 54)
9	-18	(27; 36)	(72; -54)
-9	18	(-27; -36)	(-72; 54)
-9	-18	(-27; -36)	(72; -54)
18	9	(54; 72)	(-36; 27)
18	-9	(54; 72)	(36; -27)
-18	9	(-54; -72)	(-36; 27)
-18	-9	(-54; -72)	(36; -27)

Задача 4. Да се намери най-голямото естествено число n , за което съществуват n на брой триъгълника със следното свойство: множеството от градусните мерки на ъглите на тези триъгълници се състои от $3n$ на брой различни естествени числа.

Решение. Нека триъгълникът $\triangle_i$ има ъгли $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ за всяко $i = 1, 2, \dots, n$.

Сборът на градусните мерки на ъглите на триъгълниците е $180^\circ \cdot n$. Ако

$$\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \alpha_2, \beta_2, \gamma_2, \dots, \alpha_n, \beta_n, \gamma_n$$

са $3n$ на брой различни естествени числа, сборът им е най-малко $1 + 2 + \dots + 3n = \frac{3n(3n+1)}{2}$. Следователно

$$180 \cdot n \geq \frac{3n(3n+1)}{2} \implies n \leq 39\frac{2}{3},$$

т.е. естественото число n е най-много 39.

(3 точки)

Пример за 39 триъгълника с желаното свойство е следният: 30 триъгълника с ъгли от вида

$$(i^\circ, (91 - 2i)^\circ, (89 + i)^\circ), \quad i = 1, 2, \dots, 30,$$

т.е.

$$(1^\circ, 89^\circ, 90^\circ), (2^\circ, 87^\circ, 91^\circ), (3^\circ, 85^\circ, 92^\circ), \dots, (30^\circ, 31^\circ, 119^\circ),$$

(в които „четните“ ъгли са от 2° до 30° и от 90° до 118°) и 9 триъгълника само с „четни“ ъгли от 32° до 88° :

$$(32^\circ, 60^\circ, 88^\circ), (34^\circ, 62^\circ, 84^\circ), (36^\circ, 64^\circ, 80^\circ), (38^\circ, 66^\circ, 76^\circ), (40^\circ, 68^\circ, 72^\circ),$$

$$(42^\circ, 52^\circ, 86^\circ), (44^\circ, 54^\circ, 82^\circ), (46^\circ, 56^\circ, 78^\circ), (48^\circ, 58^\circ, 74^\circ).$$

(4 точки)